

Über die von einem Ideal $I \subset R$ erzeugten R -Moduln

Helmut Zöschinger

Mathematisches Institut der Universität München

Theresienstr. 39, D-80333 München

E-mail: zoeschinger@mathematik.uni-muenchen.de

Abstract

Let (R, \mathfrak{m}) be a commutative noetherian local ring. We investigate under which conditions an R -module M is generated by an ideal I , i.e. there exists an epimorphism $I^{(\Lambda)} \twoheadrightarrow M$. If M is uniserial, i.e. $\mathcal{L}(M)$ is totally ordered and finite, this is equivalent to $\mathfrak{m}^{n-1} \cdot I \not\subset \text{Ann}_R(M) \cdot I$ ($\text{length}(M) = n \geq 1$). If M is cyclic and $I = \mathfrak{m}$, this is equivalent to: Either it is $M \cong R/\mathfrak{p}$ (R/\mathfrak{p} a discrete valuation ring) or $M \cong C/\text{So}(C)$ (C a uniserial R -module). If A is free and B is a submodule of A , then the Matlis dual $(A/B)^\circ = \text{Hom}_R(A/B, E)$ is I -generated if and only if $B = (IB) :_A I$. In the case $I = \mathfrak{m}$, this condition leads to the “basically full ideals” considered by Heinzer, Ratliff Jr. and Rush. By studying the dual condition $M = I(M :_X I)$ in the last section, we can generalize some results of that work.

Key words: I -generated and I° -cogenerated modules, uniserial modules, basically full ideals, Matlis duality.

Mathematics Subject Classification (2010): 13C05, 13E15, 13F10, 16P20.

1 I -generierte Moduln

Sei (R, \mathfrak{m}) ein kommutativer, noetherscher lokaler Ring, I ein Ideal von R und M ein R -Modul. Bekanntlich heißt M *I -generiert* (in Zeichen $M \in \text{Gen}(I)$), wenn es eine Indexmenge Λ und einen Epimorphismus $I^{(\Lambda)} \twoheadrightarrow M$ gibt. Faktormoduln und direkte Summen sind also wieder I -generiert, ebenso – wie aus der nächsten Proposition folgt – direkte Produkte. Ein *zyklischer* R -Modul M ist genau dann I -generiert, wenn es einen Epimorphismus $I \twoheadrightarrow M$ gibt.

Proposition 1.1 *Für einen R -Modul M und ein Ideal I von R sind äquivalent:*

(i) M ist I -generiert.

(ii) Es gibt eine Erweiterung $M \subset X$ mit $M = IX$.

War $M \subset Y$ und Y injektiv, so ist das weiter äquivalent mit

(iii) $M = I(M :_Y I)$.

BEWEIS (i \rightarrow ii) Zum Epimorphismus $f: I^{(\Lambda)} \rightarrow M$ bilde man die Fasersumme

$$\begin{array}{ccc} I^{(\Lambda)} & \subset & R^{(\Lambda)} \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ M & \subset & X \end{array}$$

und weil dann auch g ein Epimorphismus ist, folgt $M = IX$.

(ii \rightarrow i) Mit einem Epimorphismus $h: R^{(\Delta)} \rightarrow X$ folgt $h(I \cdot R^{(\Delta)}) = IX = M$, also $I^{(\Delta)} \rightarrow M$.

(iii \rightarrow ii) ist klar, und bei (ii \rightarrow iii) folgt aus dem kommutativen Dreieck

$$\begin{array}{ccc} M & \subset & X \\ \cap & \nearrow \alpha & \\ Y & & \end{array}$$

mit $Y' = \text{Bi } \alpha$, dass $M = I \cdot Y'$ ist, wegen $Y' \subset M :_Y I$ also sogar $M = I(M :_Y I)$. \square

Durch die Eigenschaft $M = IX$ ist X natürlich nicht eindeutig bestimmt: Wählt man eine reine Erweiterung $X \subset Y$ mit $I \cdot Y/X = 0$, folgt auch $M = IY$. Andererseits kann man, wenn M endlich erzeugt war, auch X endlich erzeugt wählen: $M = Ra_1 + \dots + Ra_n$ und $a_i \in IX$, also $a_i \in IX_i$ mit $X_i \subset X$ endlich erzeugt ($1 \leq i \leq n$) $\implies X' = X_1 + \dots + X_n$ endlich erzeugt und $M = IX'$. Mit der minimalen Erzeugendenanzahl $v(M) = \dim_k(M/\mathfrak{m}M)$ gilt genauer:

Lemma 1.2 *Ist M endlich erzeugt und I -generiert, so gibt es eine Erweiterung $M \subset X$ mit $M = IX$ und $v(X) \leq v(M)$.*

BEWEIS Sei $v(M) = n \geq 1$. Nach der Vorbemerkung kann man X schon als endlich erzeugt annehmen, $X = X_1 + \dots + X_t$, alle X_i zyklisch $\neq 0$. Im k -Vektorraum $\overline{M} = M/\mathfrak{m}M = \overline{IX_1} + \dots + \overline{IX_t}$ kann man so umordnen, dass die Darstellung $\overline{M} = \overline{IX_1} + \dots + \overline{IX_s}$ unverkürzbar und $s \leq t$ ist. Es folgt $s \leq n$, $M = IX'$ mit $X' = X_1 + \dots + X_s$, also $v(X') \leq s$. \square

Beispiel 1 Genau dann ist k I -generiert, wenn $I \neq 0$ ist. Genau dann ist R I -generiert, wenn $I \cong R$ ist.

BEWEIS Das erste ist klar, und beim zweiten folgt aus $f: I \rightarrow R$, dass $I = \text{Ke } f \oplus I_1$ ist, also $I_1 \cong R$ einen NNT enthält, also $\text{Ke } f = 0$ ist. \square

Beispiel 2 Sei M ein beliebiger R -Modul, aber das Ideal I zyklisch. Genau dann ist M I -generiert, wenn $\text{Ann}_R(I) \cdot M = 0$ ist.

BEWEIS „ \Rightarrow “ gilt stets nach (1.1, ii), und bei „ \Leftarrow “ folgt aus $R^{(\Lambda)} \rightarrow M$ nach Voraussetzung auch $(R/\text{Ann}_R(I))^{(\Lambda)} \rightarrow M$. Aber weil I zyklisch war, ist $R/\text{Ann}_R(I) \cong I$. \square

Beispiel 3 Sei R/\mathfrak{p} ein diskreter Bewertungsring, $I \not\subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}M = 0$. Dann ist M I -generiert.

BEWEIS Im Ring $\overline{R} = R/\mathfrak{p}$ ist das Ideal $\overline{I} = (I + \mathfrak{p})/\mathfrak{p}$ nicht Null, also isomorph zu \overline{R} . Aus $\overline{I}^{(\Lambda)} \rightarrow M$ über \overline{R} folgt dann $I^{(\Lambda)} \rightarrow M$ über R . \square

Beispiel 4 Sei I von einer R -regulären Folge (r_1, \dots, r_s) erzeugt ($s \geq 1$) und $IM = 0$. Dann ist M I -generiert.

BEWEIS Der Konormalenmodul I/I^2 ist über R/I frei $\neq 0$ (siehe [3] p. 153), so dass es einen Epimorphismus $I \twoheadrightarrow R/I$ gibt. Mit $R^{(\Lambda)} \rightarrow M$ folgt dann auch $I^{(\Lambda)} \twoheadrightarrow M$. \square

Beispiel 5 Sei M schwach-injektiv und $\text{Ann}_R(I) \cdot M = 0$. Dann ist M I -generiert.

BEWEIS M ist in jeder Erweiterung koabgeschlossen und deshalb die kanonische Abb. $M/IM \rightarrow M/M[\text{Ann}_R(I)]$ ein wesentlicher Epimorphismus ([6] p. 4402). Nach Voraussetzung ist $M = M[\text{Ann}_R(I)]$, also sogar $M = IM$. \square

Wir wollen im nächsten Satz alle einreihigen, I -generierten R -Moduln bestimmen. Dabei heiße M *einreihig*, wenn sein Untermodulverband $\mathcal{L}(M)$ totalgeordnet und endlich ist.

Lemma 1.3 *Ist M von endlicher Länge $n \geq 1$, so gilt: Genau dann ist M einreihig, wenn $\mathfrak{m}^{n-1} \not\subset \text{Ann}_R(M)$.*

BEWEIS Sei gleich $n \geq 2$. Bei „ \Rightarrow “ sei $M \supsetneq U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq \dots \supsetneq U_{n-1} \supsetneq 0$ der gesamte Untermodulverband. Dann sind alle U_i zyklisch, also $U_1 = \mathfrak{m}M$, $U_2 = \mathfrak{m}U_1 = \mathfrak{m}^2M$, \dots , $U_{n-1} = \mathfrak{m}^{n-1}M \neq 0$.

Bei „ \Leftarrow “ sind in der Folge $M \supset \mathfrak{m}M \supset \mathfrak{m}^2M \supset \dots \supset \mathfrak{m}^{n-1}M \supsetneq 0$ sogar alle $\mathfrak{m}^iM \neq 0$ ($0 \leq i \leq n-1$), so dass in

$$n = \text{Länge}(M/\mathfrak{m}M) + \text{Länge}(\mathfrak{m}M/\mathfrak{m}^2M) + \dots + \text{Länge}(\mathfrak{m}^{n-1}M)$$

alle Summanden den Wert 1 haben, also alle \mathfrak{m}^iM zyklisch sind. In $M \cong R/\mathfrak{a}$ ist dann auch $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ zyklisch, d. h. der Ring R/\mathfrak{a} einreihig, also auch der R -Modul M . \square

Satz 1.4 *Für einen einreihigen Modul M der Länge $n \geq 1$ sind quivalent:*

- (i) M ist I -generiert.
- (ii) $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}I) : I$ mit $\mathfrak{a} = \text{Ann}_R(M)$.
- (iii) $\mathfrak{m}^{n-1} \cdot I \not\subset \text{Ann}_R(M) \cdot I$.

BEWEIS (i \rightarrow ii) Es genügt, dass M zyklisch ist: Aus $I \twoheadrightarrow M \cong R/\mathfrak{a}$ folgt dann $I/\mathfrak{a}I \twoheadrightarrow R/\mathfrak{a}$, also $(\mathfrak{a}I) : I \subset \mathfrak{a}$, und „ \supset “ ist klar.

(ii \rightarrow i) Es genügt, dass R/\mathfrak{a} ein QF-Ring ist (d. h. als Ring artinsch und injektiv): Der nach Voraussetzung treue R/\mathfrak{a} -Modul $I/\mathfrak{a}I$ hat dann einen direkten Summanden $\cong R/\mathfrak{a}$, so dass aus $I \twoheadrightarrow I/\mathfrak{a}I \twoheadrightarrow R/\mathfrak{a}$ die Behauptung folgt.

(ii \rightarrow iii) Wäre $\mathfrak{m}^{n-1}I \subset \mathfrak{a}I$, d. h. $\mathfrak{m}^{n-1} \subset (\mathfrak{a}I) : I$, folgte aus der Voraussetzung $\mathfrak{m}^{n-1} \subset \mathfrak{a}$ im Widerspruch zu (1.3).

(iii \rightarrow ii) Wäre $\mathfrak{a} \subsetneq (\mathfrak{a}I) : I$, also $\mathfrak{m}^{n-1} + \mathfrak{a} \subset (\mathfrak{a}I) : I$, folgte mit $\mathfrak{m}^{n-1}I \subset \mathfrak{a}I$ ein Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Folgerung 1.5 Sei M einreihig von der Länge $n \geq 1$ und $M \supsetneq M_1 \supsetneq \dots \supsetneq M_n = 0$ seine Kompositionsreihe. Genau dann ist M/M_i I -generiert ($1 \leq i \leq n$), wenn $\mathfrak{m}^{i-1} \cdot I \not\subset \text{Ann}_R(M) \cdot I$. Insbesondere wird M/M_i von \mathfrak{m}^{n-i} generiert.

BEWEIS Mit $M \cong R/\mathfrak{a}$ ist $M/M_i \cong R/\mathfrak{m}^i + \mathfrak{a}$ einreihig von der Länge i , also nach (1.4) genau dann I -generiert, wenn $\mathfrak{m}^{i-1} \cdot I \not\subset (\mathfrak{m}^i + \mathfrak{a}) \cdot I$ ist, mit $\bar{I} = I/\mathfrak{a}I$ also $\mathfrak{m}^{i-1} \cdot \bar{I} \not\subset \mathfrak{m}^i \cdot \bar{I}$, $\mathfrak{m}^{i-1} \cdot \bar{I} \neq 0$, $\mathfrak{m}^{i-1} \cdot I \not\subset \mathfrak{a}I$. Der Zusatz gilt, weil $\mathfrak{m}^{i-1} \cdot \mathfrak{m}^{n-i}$ nach (1.3) nicht einmal in $\text{Ann}_R(M)$ liegt. \square

2 Der Spezialfall $I = \mathfrak{m}$

Bekanntlich ist $\mathcal{L}(R)$ genau dann totalgeordnet, wenn entweder R ein diskreter Bewertungsring ist oder R einreihig. Eine ähnliche Dichotomie erhält man für die zyklischen \mathfrak{m} -generierten R -Moduln:

Satz 2.1 Ein zyklischer R -Modul M ist genau dann \mathfrak{m} -generiert, wenn entweder $M \cong R/\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring ist oder $M \cong C/\text{So}(C)$ für einen einreihigen R -Modul C .

BEWEIS „ \Rightarrow “ Sei M zyklisch und \mathfrak{m} -generiert, $M = \mathfrak{m}X$, und nach (1.2) kann man auch X zyklisch annehmen. Zeigen wir zuerst, dass $\mathcal{L}(X)$ totalgeordnet ist: Bei $X/M = 0$, d. h. $M = 0$ ist nichts zu zeigen. Bei $X/M \neq 0$ ist $X \cong R/\mathfrak{b}$, $M \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{b}$, d. h. im Ring R/\mathfrak{b} ist das maximale Ideal zyklisch. Damit ist der Idealverband von R/\mathfrak{b} totalgeordnet, also auch $\mathcal{L}(X)$.

Aus $M \cong R/\mathfrak{a}$ folgt entweder $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ und R/\mathfrak{p} ein diskreter Bewertungsring. Oder R/\mathfrak{a} ist einreihig, aus $\mathfrak{m} \twoheadrightarrow R/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}/\mathfrak{c} \cong R/\mathfrak{a}$ folgt dann, dass auch $C = R/\mathfrak{c}$ einreihig ist und $C/\text{So}(C) \cong R/\mathfrak{c} : \mathfrak{m} = R/\mathfrak{a} \cong M$.

„ \Leftarrow “ Falls $M \cong R/\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring ist, folgt nach (1, Beispiel 3) die Behauptung. Falls $M \cong C/\text{So}(C)$ ist mit C einreihig, ist bei $M = 0$ wieder nichts zu zeigen, und bei $M \neq 0$ ist $\text{Länge}(C) \geq 2$, also $C/\text{So}(C)$ nach (1.5) \mathfrak{m} -generiert. \square

Folgerung 2.2 Sei M zyklisch und $\text{Ann}_R(M) \subset \mathfrak{m}^2$. Genau dann ist M \mathfrak{m} -generiert, wenn $\mathcal{L}(R)$ totalgeordnet und $\text{So}(R) \cdot M = 0$ ist.

BEWEIS „ \Rightarrow “ Weil $\mathcal{L}(M)$ totalgeordnet ist, also auch $\mathcal{L}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$, ist \mathfrak{m} zyklisch, also sogar $\mathcal{L}(R)$ totalgeordnet, und $\text{So}(R) \cdot M = 0$ ist klar.

„ \Leftarrow “ Dann ist entweder R ein diskreter Bewertungsring und nach (1, Beispiel 3) jeder R -Modul \mathfrak{m} -generiert, oder R einreihig und M nach (1, Beispiel 2) \mathfrak{m} -generiert. \square

In dem Spezialfall, dass (R, \mathfrak{m}) ein QF-Ring, aber nicht einreihig ist, $\mathfrak{m}^2 \neq 0$ und $\mathfrak{m}^3 = 0$ (z. B. $R = k[X, Y]/(X^2, Y^2)$), wollen wir jetzt alle \mathfrak{m} -generierten Unter- und Faktormoduln von R bestimmen:

Beispiel Ist R wie eben, so sind $0, \mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}$ die einzigen \mathfrak{m} -generierten Untermoduln von R und $R/R, R/\mathfrak{m}$ die einzigen \mathfrak{m} -generierten Faktormoduln von R .

BEWEIS Klar sind die angegebenen Moduln alle \mathfrak{m} -generiert. Untermoduln: Ist $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{m}$ \mathfrak{m} -generiert, folgt (weil ${}_R R$ injektiv ist) nach (1.1, iii) $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}\mathfrak{b}$ für ein Ideal $\mathfrak{b} \neq R$, also $\mathfrak{a} \in \{0, \mathfrak{m}^2\}$.

Faktormoduln: R besitzt keinen einreihigen Modul M der Länge 3 (also auch keinen größerer Länge), denn sonst folgte nach (1.3) $\mathfrak{m}^2 \not\subset \text{Ann}_R(M)$, also $M \cong R$ entgegen der Voraussetzung. Nach (2.1) kann deshalb R/\mathfrak{a} , mit $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{m}$ nicht \mathfrak{m} -generiert sein. \square

3 Dualisierung

Verlangt man von einem R -Modul M , dass nicht er selbst, sondern sein Matlis-Duales $M^\circ = \text{Hom}_R(M, E)$ I -generiert ist, erhält man eine neue Klasse von R -Moduln, die im Spezialfall $I = \mathfrak{m}$ zu den von Heinzer, Ratliff Jr. und Rush in [2] untersuchten „basically full ideals“ führt.

Proposition 3.1 Für einen R -Modul M und ein Ideal I von R sind äquivalent:

- (i) M° ist I -generiert.
- (ii) M ist I° -kogenerated.
- (iii) Es gibt einen R -Modul C mit $C/C[I] \cong M$.

War $M \cong A/B$ und A frei, so ist das weiter äquivalent mit

- (iv) $B = (IB) :_A I$.

BEWEIS (i \rightarrow ii) Aus $I^{(\Lambda)} \twoheadrightarrow M^\circ$ folgt $M \hookrightarrow M^{\circ\circ} \hookrightarrow (I^{(\Lambda)})^\circ \cong (I^\circ)^\Lambda$.

(ii \rightarrow i) Für jeden I -generierten R -Modul $N = I \cdot Y$ ist $N^\circ \cong Y^\circ/Y^\circ[I]$, also auch $N^{\circ\circ} \cong I \cdot Y^{\circ\circ}$ I -generiert. Unter unserer Voraussetzung, d. h. $M \hookrightarrow (I^\circ)^\Lambda \cong N^\circ$ mit $N = I^{(\Lambda)}$, folgt jetzt $N^{\circ\circ} \twoheadrightarrow M^\circ$, und weil I , also auch N und $N^{\circ\circ}$ I -generiert sind, ist es auch M° .

(i \rightarrow iii) Aus $M^\circ = I \cdot Y$ folgt $\beta: Y^\circ \twoheadrightarrow M^{\circ\circ}$ mit $\text{Ke } \beta = \text{Ann}_{Y^\circ}(IY) \cong Y^\circ[I]$, mit $C = \beta^{-1}(M)$ und der induzierten Abb. $\gamma: C \twoheadrightarrow M$ also $\text{Ke } \gamma = C[I]$.

(iii \rightarrow i) Es folgt $M^\circ \cong \text{Ke}(C^\circ \twoheadrightarrow (C[I])^\circ) = \text{Ann}_{C^\circ}(C[I]) = I \cdot C^\circ$.

(iii \rightarrow iv) Weil A frei ist, erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & A & & \\
 & & & \nearrow \alpha & \downarrow \text{kan} & & \\
 0 & \longrightarrow & C[I] & \subset & C & \xrightarrow{\gamma} & A/B \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

in dem $B = \alpha^{-1}(\text{Ke } \gamma) = \text{Ke } \alpha :_A I$ ist, also $B = (IB) :_A I$.

(iv \rightarrow iii) Hier kann A beliebig sein, denn mit $C = A/IB$ gilt $C/C[I] \cong A/(IB) :_A I = A/B \cong M$. \square

Auch für einen zyklischen, I -generierten R -Modul $M \cong R/\mathfrak{b}$ gilt nach dem Beweis von (1.4, i \rightarrow ii), dass $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}I) : I$ ist.

Folgerung 3.2 *Jeder zyklische I -generierte R -Modul ist auch I° -kogenerated.*

Ein R -Modul M heißt bekanntlich *kozyklisch*, wenn er sich in E einbetten lässt. Insbesondere ist dann $M^\circ/\mathfrak{m} \cdot M^\circ \cong (M[\mathfrak{m}])^\circ$ Null oder einfach. War also M sowohl zyklisch als auch kozyklisch, ist M von endlicher Länge, also auch M° zyklisch und daher $M \cong M^\circ$.

Folgerung 3.3 *Ist M sowohl zyklisch als auch kozyklisch, so gilt: Genau dann ist M I° -kogenerated, wenn M I -generiert ist.*

Beispiele für I° -kogeneratede R -Moduln: (1) Eine direkte Summe von einreihigen Moduln ist genau dann I° -kogenerated, wenn sie I -generiert ist (denn die unzerlegbaren Bausteine erfüllen (3.3)). (2) Ist R ein diskreter Bewertungsring und $I \neq 0$, so ist jeder R -Modul M I° -kogenerated (denn M° ist I -generiert). (3) Wird I von einer R -regulären Folge (r_1, \dots, r_s) erzeugt ($s \geq 1$) und ist $IM = 0$, so ist M I° -kogenerated (denn es ist $I \cdot M^\circ = 0$). (4) E ist genau dann I° -kogenerated, wenn $I \cong R$ ist (denn aus $E \hookrightarrow I^\circ \cong E/E[I]$ folgt $E \cong I^\circ$, $I \cong R$). (5) Ist R ein QF-Ring wie im 2. Abschnitt, d. h. nicht einreihig und $\mathfrak{m}^2 \neq 0$, $\mathfrak{m}^3 = 0$, so sind 0 , \mathfrak{m}^2 die einzigen \mathfrak{m}° -kogenerateden Untermoduln und R/R , R/\mathfrak{m} , R/\mathfrak{m}^2 die einzigen \mathfrak{m}° -kogenerateden Faktormoduln von R .

Ist A ein beliebiger R -Modul, so heiße ein Untermodul B *I -groß* in A , wenn es ein $B' \subset B$ gibt mit $B/B' = (A/B')[I]$. Das ist äquivalent mit $B = (IB) :_A I$, und im Spezialfall $I = \mathfrak{m}$, A endlich erzeugt, A/B artinsch und $B \neq 0$ ist das gerade eine Beschreibung von „ B basically full in A “ in ([2] Theorem 2.12). Sind aber $B \subset A$ und I beliebig, gilt immer noch:

- (1) $B^* = (IB) :_A I$ ist der kleinste Modul zwischen B und A , so dass B^* I -groß in A ist ([2] Theorem 4.2).
- (2) Sei B I -groß in A und $(A/B)[I]$ groß in A/B . Dann folgt aus $B \subset C \subset A$ und $B \cap IC = IB$ stets $B = C$ ([2] Theorem 2.12).
- (3) Aus $B \subset C \subset A$ und $B \cap IC = IB$ folge stets $B = C$. Falls dann A endlich erzeugt ist, wird A/B durch eine Potenz von I annulliert ([2] Theorem 2.6).

Die Beweise sind direkte Verallgemeinerungen von denen in [2], sollen aber im dualen Fall im nächsten Abschnitt ausgeführt werden.

4 I -kleine Erweiterungen

Sei $M \subset X$ eine beliebige Erweiterung. Wir sagen, M sei I -klein in X , wenn es einen Zwischenmodul $M \subset X' \subset X$ gibt mit $M = IX'$, und daraus folgt sofort $M = I(M :_X I)$. Natürlich ist dann M I -generiert, und falls X injektiv ist, gilt nach (1.1, iii) auch die Umkehrung.

Lemma 4.1 Sei $M \subset X$ eine beliebige Erweiterung und $M_* = I(M : I)$.

- (a) Stets gilt $IM \subset M_* \subset M$ und $M_* : I = M : I$.
- (b) M_* ist der größte Untermodul von M , der I -klein in X ist.

BEWEIS Für Untermoduln W von X schreiben wir statt $W :_X I$ nur mehr $W : I$.

(a) Aus $M \subset M : I$ folgt $IM \subset M_*$. Aus $u \in M_*$ folgt $u = \sum r_i x_i$ mit $r_i \in I$, $x_i \in M : I$, also $u \in M$. Aus $x \in M : I$ folgt $rx \in M_*$ für alle $r \in I$, also $x \in M_* : I$.

(b) Multipliziert man die letzte Gleichung mit I , erhält man $M_{**} = M_*$, und das bedeutet, dass M_* I -klein in X ist. Falls auch $U \subset M$ und U I -klein in X ist, folgt aus $U_* = U$ sogar $U \subset M_*$. \square

Bemerkung 4.2 (1) Für jede Erweiterung $M \subset X$ gilt: $M = IX \Rightarrow M$ ist I -klein in $X \Rightarrow M \subset IX$. Das nachfolgende Beispiel (mit $X = R$ und $I = \mathfrak{m}$) zeigt, dass nirgends die Umkehrung gilt. (2) Ist $M \subset X$ beliebig und I zyklisch, gilt $M_* = M \cap IX$. Insbesondere ist M genau dann I -klein in X , wenn $M \subset IX$ ist. (3) Ist $M \subset X$ eine reine Erweiterung, folgt aus $X[I] \twoheadrightarrow \frac{X}{M}[I]$, dass $M_* = IM$ ist. Insbesondere ist M genau dann I -klein in X , wenn M I -teilbar ist.

Beispiel Sei R ein QF-Ring wie im 2. Abschnitt, d.h. nicht einreihig und $\mathfrak{m}^2 \neq 0$, $\mathfrak{m}^3 = 0$. Für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subset R$ lässt sich dann $\mathfrak{b}_* = \mathfrak{m}(\mathfrak{b} : \mathfrak{m})$ und $\mathfrak{b}^* = (\mathfrak{m}\mathfrak{b}) : \mathfrak{m}$ berechnen:

\mathfrak{b}	0	\mathfrak{m}^2	$\mathfrak{m}^2 \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{m}$	\mathfrak{m}	R
\mathfrak{b}_*	0	\mathfrak{m}^2	\mathfrak{m}^2	\mathfrak{m}	\mathfrak{m}
\mathfrak{b}^*	\mathfrak{m}^2	\mathfrak{m}^2	\mathfrak{m}	\mathfrak{m}	R

Lemma 4.3 Genau dann ist M I -klein in X , wenn $\text{Ann}_{X^\circ}(M)$ I -groß in X° ist.

BEWEIS Für eine beliebige Erweiterung $C \subset A$ gilt $\text{Ann}_{A^\circ}(I \cdot C) = \text{Ann}_{A^\circ}(C) :_{A^\circ} I$ und $\text{Ann}_{A^\circ}(C :_A I) = I \cdot \text{Ann}_{A^\circ}(C)$. Speziell für $A = X^\circ$ und $B = \text{Ann}_{X^\circ}(M)$ gilt damit

$$B^* = (IB) :_A I = (I \cdot \text{Ann}_{X^\circ}(M)) :_{X^\circ} I = \text{Ann}_{X^\circ}(M : I) :_{X^\circ} I = \text{Ann}_{X^\circ}(M_*),$$

also $M_* = M$ genau dann, wenn $B = B^*$ ist. \square

Bemerkung 4.4 Beginnt man mit einer beliebigen Erweiterung $B \subset A$, so kann man entsprechend zeigen: Genau dann ist B I -groß in A , wenn $\text{Ann}_{A^\circ}(B)$ I -klein in A° ist.

M heiße *stark I -klein* in X , wenn für jeden Untermodul U von M gilt: Ist $\frac{X}{U}[I] \rightarrow \frac{X}{M}[I]$ surjektiv (d.h. $U : I + M = M : I$), so folgt $U = M$. Speziell für $U = M_*$ ist diese Gleichung nach (4.1, a) erfüllt, also nach Voraussetzung $M_* = M$: Jede stark I -kleine Erweiterung ist I -klein. Die Umkehrung gilt i. Allg. nicht: Ist M stark I -klein in X und entweder M rein in X oder $(X/M)[I] = 0$, folgt bereits $M = 0$.

Lemma 4.5 *Ist M stark I -klein in X und $X_1 \subset X$, so ist auch $(M + X_1)/X_1$ stark I -klein in X/X_1 .*

BEWEIS Sei $\overline{X} = X/X_1$ und $\overline{V} \subset \overline{M}$, so dass $\frac{\overline{X}}{\overline{V}}[I] \twoheadrightarrow \frac{\overline{X}}{\overline{M}}[I]$ surjektiv ist, also $X_1 \subset V \subset M + X_1$ und $\frac{X}{V}[I] \twoheadrightarrow \frac{X}{M+X_1}[I]$ surjektiv, d.h.

$$V : I + (M + X_1) = (M + X_1) : I .$$

Könnten wir $(V \cap M) : I + M = M : I$ zeigen, folgte nach Voraussetzung $V \cap M = M$, $M \subset V$, also $\overline{V} = \overline{M}$ wie verlangt.

Für $x \in M : I$ gilt $x = a + b$ mit $a \in V : I$, $b \in M$, also $ra = rx - rb \in V \cap M$ für alle $r \in I$, also $a \in (V \cap M) : I$, $x \in (V \cap M) : I + M$ wie behauptet. \square

Bekanntlich ist IM genau dann klein in M , wenn $I \subset \bigcap \text{Koass}(M)$ ist ([4] Lemma 2.2). Das vererbt sich auf Faktormoduln, und war M/U sogar artinsch, folgt aus $I \subset \sqrt{\text{Ann}_R(M/U)}$, dass $I^n \cdot M/U = 0$ ist für ein $n \geq 1$. Umgekehrt ist, falls jeder artinsche Faktormodul von M durch eine Potenz von I annulliert wird, auch IM klein in M : Aus $V + IM = M$ mit M/V artinsch folgt $I^n \cdot M/V = 0$, $V + I^n M = M$, $V = M$.

Satz 4.6 *Genau dann ist M stark I -klein in X , wenn M I -klein in X ist und IM klein in M .*

BEWEIS „ \Leftarrow “ ist klar: Aus $U \subset M$ und $U : I + M = M : I$ folgt durch Multiplikation mit I , dass $U_* + IM = M_*$ ist, mit der ersten Bedingung also $U_* + IM = M$, mit der zweiten dann $U = M$.

Bei „ \Rightarrow “ nehmen wir im **1. Schritt** an, dass X zusätzlich artinsch ist. Nach der dualen Formulierung von Artin-Rees ([5] p. 640) gibt es dann ein $n \geq 1$ mit

$$\frac{X}{M}[I] \subset \frac{X[I^n] + M}{M} .$$

Mit $U = M[I^n]$ folgt $U : I + M = M : I$ (also nach Voraussetzung $U = M$, $I^n \cdot M = 0$ wie gewünscht): Für $x \in M : I$ gilt $x = a + b$ mit $a \in X[I^n]$, $b \in M$, also $ra = rx - rb \in M \cap X[I^n] = U$ für alle $r \in I$, also $a \in U : I$, $x \in U : I + M$ wie behauptet.

Im **2. Schritt** sei jetzt X beliebig. Nach der Vorbemerkung müssen wir zeigen, dass jeder artinsche Faktormodul M/V durch eine Potenz von I annulliert wird. Ist X_1/V ein Durchschnittskomplement von M/V in X/V , wird $M/V \hookrightarrow X/X_1$ ein wesentlicher Monomorphismus, so dass auch $\overline{X} = X/X_1$ artinsch und \overline{M} nach (4.5) stark I -klein in \overline{X} ist. Nach dem ersten Schritt folgt jetzt $I^n \cdot \overline{M} = 0$ für ein $n \geq 1$, d.h. $I^n \cdot M/V = 0$. \square

Bemerkung 4.7 Ein Untermodul B von A heiße *stark I -groß* in A , wenn aus $B \subset C \subset A$ und $B \cap IC = IB$ stets folgt $B = C$. Die zu (4.6) duale Aussage lautet dann: Genau dann ist B stark I -groß in A , wenn B I -groß in A ist und $\frac{A}{B}[I]$ groß in $\frac{A}{B}$ (d. h. A/B I -torsion ist). Das ist eine Zusammenfassung der Punkte (2) und (3) im dritten Abschnitt.

Folgerung 4.8 *Genau dann ist M stark I -klein in X , wenn $\text{Ann}_{X^\circ}(M)$ stark I -groß in X° ist.*

BEWEIS Auf Grund von (4.3) ist nur noch zu zeigen: Genau dann ist IM klein in M , wenn $X^\circ/\text{Ann}_{X^\circ}(M) \cong M^\circ$ I -torsion ist. Das ist aber klar wegen $\text{Koass}(M) = \text{Ass}(M^\circ)$. \square

Bemerkung 4.9 Entsprechend (4.4) kann man zeigen: Ist $B \subset A$ und $\text{Ann}_{A^\circ}(B)$ stark I -klein in A° , so ist B stark I -groß in A . Die Umkehrung gilt aber nicht: Ist R ein diskreter Bewertungsring und $A = K^{(\mathbb{N})}$, $B = R^{(\mathbb{N})}$, so ist B stark \mathfrak{m} -groß in A , aber $\text{Ann}_{A^\circ}(B)$ *nicht* stark \mathfrak{m} -klein in A° , denn in $\text{Ann}_{A^\circ}(B) \cong \widehat{R}^\mathbb{N}$ ist das Radikal nicht klein.

Literatur

- [1] Ph. Griffith: *On the decomposition of modules and generalized left uniserial rings*: Math. Annalen 184 (1970) 300–308
- [2] W. J. Heinzer – L. J. Ratliff Jr. – D. E. Rush: *Basically full ideals in local rings*: J. Algebra 250 (2002) 371–396
- [3] E. Kunz: *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*: Vieweg, Braunschweig (1980)
- [4] H. Zöschinger: *Linear-kompakte Moduln über noetherschen Ringen*: Arch. Math 41 (1983) 121–130
- [5] H. Zöschinger: *Eine Dualisierung des Theorems von Matijevic*: Commun. Algebra 20 (1992) 639–643
- [6] H. Zöschinger: *Schwach-flache Moduln*: Commun. Algebra 41 (2013) 4393–4407